JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 30, 149–154 (1980)

Note

Inégalité de Markov dans les ensembles effilés

PIERRE GOETGHELUCK

Université de Paris-sud, Centre d'Orsay, Département de Mathématiques, Bâtiment 425, Orsay Cedex 91405, France

Communicated by Oved Shisha

Received March 6, 1979

1. INTRODUCTION

L'inégalité de Markov sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ a été étudiée dans les cas où la frontière présente une certaine régularité, par exemple pour les compacts convexes dans [2] ou encore pour les ouverts à bord lipschitzien dans [1]. Nous nous proposons de montrer ici, en nous limitant à $\mathbb{R}^2$ que l'on peut établir une inégalité de Markov dans certains domaines présentant des effilements.

Pour tout sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$ et pour toute fonction f définie sur E on note $\|f\|_E = \sup_{(x,y)\in E} |f(x, y)|$.

Soit $p > 1$ et $E_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/0 \leqslant y \leqslant x^p, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$. On note H_n l'ensemble des polynômes de deux variables réelles, de degré total au plus n. Le but de cet article est d'établir le résultat suivant:

THÉORÈME. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $P \in H_n$:*

$$\left\| \frac{\partial P}{\partial x} \right\|_{E_p} \leqslant 8pe^4n^2 \| P \|_{E_p}, \tag{1}$$

$$\left\| \frac{\partial P}{\partial y} \right\|_{E_p} \leqslant 8e^4n^{2p} \| P \|_{E_p}. \tag{2}$$

De plus les constantes n^2 et n^{2p} sont optimales en ce qui concerne l'exposant.

2. INÉGALITÉ DE MARKOV POUR QUELQUES ENSEMBLES SIMPLES

Dans tout ce paragraphe, $P \in H_n$.

Soit $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/ |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$. L'inégalité de Markov classique (en une variable) donne immédiatement:

$$\left\| \frac{\partial P}{\partial x} \right\|_{D_1} \leqslant n^2 \| P \|_{D_1}, \qquad \left\| \frac{\partial P}{\partial y} \right\|_{D_1} \leqslant n^2 \| P \|_{D_1}.$$

0021-9045/80/100149-06$02.00/0

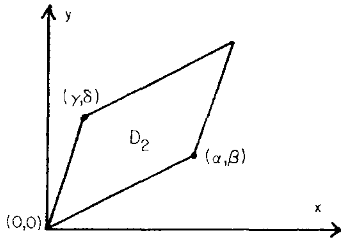

FIG. 1. L'ensemble D_2.

Soit D_2 le parallélogramme construit sur les vecteurs (α, β) et (γ, δ) (voir Fig. 1). Un changement de variables nous ramêne au cas précédent et nous permet d'obtenir:

$$\left\| \frac{\partial P}{\partial x} \right\|_{D_2} \leqslant 2(|\beta| + |\delta|)\, |\alpha\delta - \beta\gamma|^{-1} n^2 \| P \|_{D_2},$$

$$\left\| \frac{\partial P}{\partial y} \right\|_{D_2} \leqslant 2(|\alpha| + |\gamma|)\, |\alpha\delta - \beta\gamma|^{-1} n^2 \| P \|_{D_2}.$$

Soit $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (b, c)$, $D = (b/2, c/2)$, $E = (b/2, 0)$, $F = (b, c/2)$ et D_3 le triangle de sommets A, B, C. On peut recouvrir D_3 par les trois parallélogrammes *EDFB*, *ADFE*, *CDEF* (voir Fig. 2). En appliquant le résultat précédent nous avons alors:

$$\left\| \frac{\partial P}{\partial x} \right\|_{D_3} \leqslant 8b^{-1}n^2 \| P \|_{D_3}, \tag{3}$$

$$\left\| \frac{\partial P}{\partial y} \right\|_{D_3} \leqslant 8c^{-1}n^2 \| P \|_{D_3}. \tag{4}$$

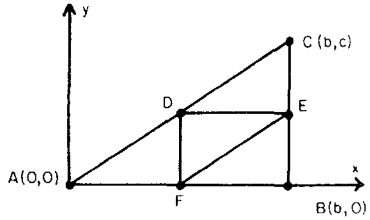

FIG. 2. L'ensemble D_3.

3. Inegalité de Markov pour E_p

Lemme 1 ([3, p. 43]). *Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$, $h > 1$ et $I(h)$ l'intervalle obtenu à partir de I par une homothétie de centre le milieu de I et de rapport h. Pour tout polynome R d'une variable réelle, de degré au plus n on a:*

$$\sup_{x \in I(h)} |R(x)| \leqslant (h + (h^2 - 1)^{1/2})^n \sup_{x \in I} |R(x)|.$$

Soit $E_{p,n} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / n^{-2} \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x^p\}$.

Corollaire. *Si $Q \in H_n$ $(n \geqslant 2)$ alors:*

$$\| Q \|_{E_p} \leqslant e^4 \| Q \|_{E_{p,n}}. \tag{5}$$

Demonstration. Il est clair (en fixant la variable y) qu'il suffit de montrer que pour tout polynôme R d'une variable, de degré au plus n $(n \geqslant 2)$ on a $\sup_{x \in [0,1]} |R(x)| \leqslant e^4 \sup_{x \in [n^{-2},1]} |R(x)|$. Pour cela on applique le Lemme 1 avec $h = (n^2 - 1)^{-1}(n^2 + 1)$ et l'on a bien, pour $n \geqslant 2$:

$$(h + (h^2 - 1)^{1/2})^n = (1 + 2(n-1)^{-1})^n \leqslant e^{2n/(n-1)} \leqslant e^4.$$

Lemme 2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $P \in H_n$ on a:*

$$\left\| \frac{\partial P}{\partial x} \right\|_{E_{p,n}} \leqslant 8pn^2 \| P \|_{E_p}, \tag{6}$$

$$\left\| \frac{\partial P}{\partial y} \right\|_{E_{p,n}} \leqslant 8n^{2p} \| P \|_{E_p}. \tag{7}$$

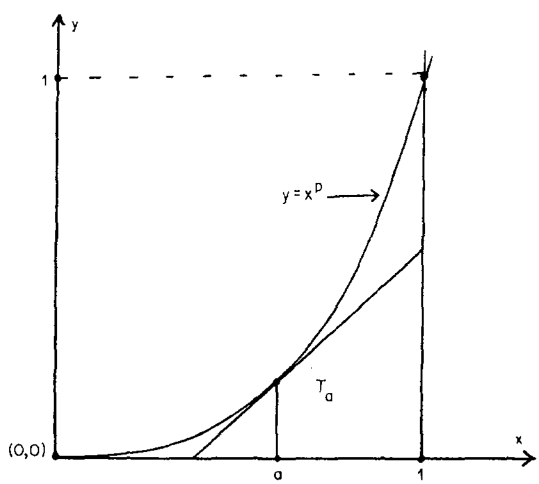

Fig. 3. Le triangle T_a.

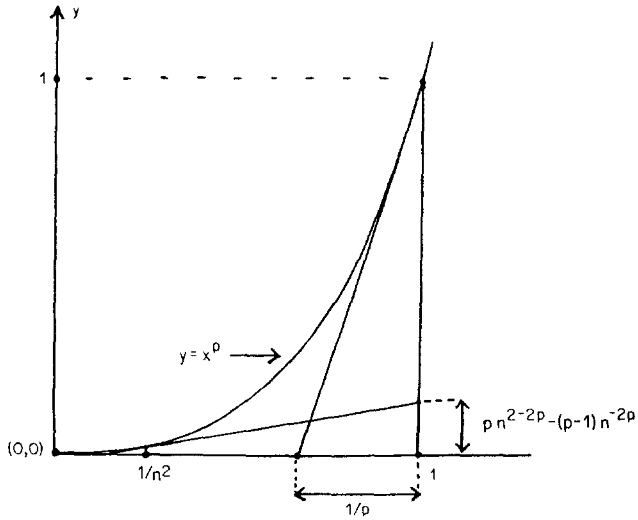

FIG. 4. Les valeurs minima de b et c.

DEMONSTRATION. La méthode consiste à recouvrir $E_{p,n}$ par des triangles du type D_3 contenus dans E_p (voir Fig. 3). Plus précisément soit T_a le triangle dont les cotés sont portés par la droite $x = 1$, la droite $y = 0$, la tangente à la courbe $y = x^p$ au point $x = a$. On a $E_{p,n} \subset \bigcup_{n^{-2} \leqslant a \leqslant 1} T_a \subset E_p$. En reprenant pour T_a les notations précédemment utilisées pour D_3 on a (voir Fig. 4): $b \geqslant p^{-1}$, $c \geqslant pn^{2-2p} - (p-1)\, n^{-2p} \geqslant n^{2-2p}$. Les inégalités (6) et (7) résultent alors immédiatement de (3) et (4).

Compte tenu de (5), ceci achève la démonstration de (1) et (2) pour $n \geqslant 2$. Mais pour $n = 1$ il est clair que

$$|a| \leqslant 2 \,\|ax + by + c\|_{E_p} \qquad \text{et} \qquad |b| \leqslant 2 \,\|ax + by + c\|_{E_p}$$

car $\|ax + by + c\|_{E_p} = \text{Max}(|c|, |b + c|, |a + b + c|)$, donc (1) et (2) sont encore vérifiées.

4. OPTIMALITÉ DES EXPOSANTS

Nous adoptons les notations de [4, ch. IV] pour les polynômes de Jacobi et la notation T_n pour les polynômes de Tchebicheff ($T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$).

L'optimalité de l'exposant 2 dans (1) est obtenue en considérant par exemple les polynômes $T_n(1 - x)$.

Pour démontrer l'optimalité de l'exposant $2p$ dans (2), nous prendrons les polynômes

$$U_{2n}(x, y) \quad P_n^{(2p,2p)}(1 - x)[T_n(1 - y) - 1].$$

Pour $0 \leqslant x \leqslant n^{-2}$ nous avons [4, p. 168]:

$$| P_n^{(2p,2p)}(1 - x)| \leqslant C_1 n^{2p}.$$

Dans E_p si $x \leqslant n^{-2}$, alors $0 \leqslant y \leqslant n^{-2p}$ et donc en utilisant la formule de Taylor à l'ordre 1 et l'inégalité de Markov en une variable:

$$| T_n(1 - y) - 1 | \leqslant | T_n(1) - 1 | + y \sup_{z \in [-1,1]} | T_n'(z)| \leqslant n^{2-2p}.$$

Donc dans E_p, pour $x \leqslant n^{-2}$, $| U_{2n}(x, y)| \leqslant C_I n^2$.

Pour $n^{-2} \leqslant x \leqslant 1$ posons $1 - x = \cos \theta$. On aura alors

$$\theta \geqslant 2^{1/2} n^{-1} \qquad \text{et} \qquad x \leqslant \tfrac{1}{2}\theta^2 \tag{8}$$

donc d'après [4, p. 169]: $| P_n^{(2p,2p)}(1 - x)| \leqslant C_2 \theta^{-2p-1/2} n^{-1/2}$. Par ailleurs (comme pour le cas précédent):

$$| T_n(1 - y) - 1 | \leqslant yn^2 \leqslant x^p n^2$$

mais aussi $| T_n(1 - y) - 1 | \leqslant 2$.

Donc si $x^p \leqslant 2n^{-2}$ alors d'après (8):

$$| U_{2n}(x, y)| \leqslant C^2 \theta^{-2p-1/2} n^{-1/2} x^p n^2 \leqslant C_3 n^2$$

et si $x^p \geqslant 2n^{-2}$, on a d'après (8) $2^{-p}\theta^{2p} \geqslant 2n^{-2}$ donc:

$$| U_{2n}(x, y)| \leqslant 2C_2 \theta^{-2p-1/2} n^{-1/2} \leqslant C_4 n^2.$$

En résumé $\| U_{2n} \|_{E_p} \leqslant C_5 n^2$.

Par ailleurs d'après [4, p. 168]:

$$\left| \frac{\partial U_{2n}}{\partial y} (0, 0) \right| = | P_n^{(2p,2p)}(1)\, T_n'(1)| \geqslant C_6 n^{2p+2}$$

donc

$$\left\| \frac{\partial U_{2n}}{\partial y} \right\|_{E_p} \geqslant C_7 n^{2p} \| U_{2n} \|_{E_p}$$

ce qui montre l'optimalité de l'exposant 2p dans (2).

Bibliographie

1. M. S. Baouendi et C. Goulaouic, Approximation polynômiale des fonctions C^∞ et analytiques, *Ann. Inst. Fourier* **21** (1971), 149–174.
2. C. Coatmelec, Approximation et interpolation des fonctions différentiables de plusieurs variables, *Ann. Sci. École Norm. Sup. Sér. 3* **83** (1966), 271–341.
3. G. G. Lorentz, "Approximation of Functions," Holt, Rinehart & Winston, New York, 1964.
4. G. Szegö, "Orthogonal Polynomials," A.M.S. Coll. Pub. Vol. 23, Amer. Math. Soc., New York, 1959.